
COURS DE LOGIQUE MATHEMATIQUE

2^{EME} ANNEE LF IG

SYLLABUS, PLAN DU COURS & TRAVAUX DIRIGES

T.MELLAH

I- SYLLABUS	2
II- PLAN DU COURS	3
III- TRAVAUX DIRIGES	4
TD N°1 - THEORIE NAÏVE DES ENSEMBLES	4
TD N°2- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE	5
TD N°3- VALIDITE D'ARGUMENT ET DEMONSTRATION DE FORMULES	7
TD N°4- LOGIQUE DES PREDICATS	8
III- TRAVAIL A RENDRE	10
PARTIE I : RECHERCHE	10
PARTIE II : DEVOIR DE MAISON	10
IV- SUPPLEMENTS : EXAMENS	11
V - ANNEXE	14

I- SYLLABUS

Objectif général

L'objectif principal de ce cours est de connaître les notions de base de la logique et les notions mathématiques utiles pour la conception d'algorithmes et le développement de programmes.

Organisation module

Ce module est réparti en 21h de cours et 21h de travaux dirigés. Par ailleurs, il nécessite de la part d'un étudiant assidu un travail personnel de 25h au minimum.

Pré requis

Comme tout cours introductif, aucun prérequis n'est exigé.

Evaluation

Ce module est soumis au régime mixte. De ce fait, la moyenne de l'étudiant sera comptée comme suit : test & TAF 10%, devoir surveillé 20% et Examen final 70%

Le devoir surveillé aura lieu la semaine du 07 Novembre 2016

L'examen final se déroulera pendant la session de Janvier 2017

Références & ressources

Je vous invite à puiser dans les ressources pédagogiques disponibles gratuitement sur la toile. Je vous suggère en particulier d'utiliser le manuel de Kenneth H. Rosen « Discrete mathematics and its applications » Seventh Edition 2012 ; ainsi que le site www.mhhe.com/rosen où plusieurs exercices d'application sont disponibles, ainsi que des exercices interactifs ;

Par ailleurs, l'apprentissage est un processus personnel, je vous encourage notamment à vous inscrire au cours de « Introduction to logic » disponible, for free, sur le site Coursera <https://www.coursera.org/learn/logic-introduction>

II- PLAN DU COURS

Théorie Naïve des ensembles

Notions de base

Règles de fonctionnement

Opération sur les ensembles, Algèbre d'ensemble, dualité

Représentation graphique (Diagramme de Venn)

Argument ; Induction mathématique

Logique Propositionnelle

Objet de la logique

Fondements (propositions, connecteurs, variables et formes propositionnelles)

Opérations logiques sur les propositions (connecteurs table de vérité, règles de formation, lois logiques)

Démonstration de formules (Logique des tables de vérité, Théorie de démonstration; Table de Beth)

Logique des prédicats

Introduction

Syntaxe de la logique des prédicats

Théorie de validité en calcul de prédicats

Dédution

Résolution

III- TRAVAUX DIRIGES

TD N°1 - THEORIE NAÏVE DES ENSEMBLES

Exercice I :

1. Quels sont les ensembles égaux $\{r, t, s\}$; $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, r\}$, $\{s, r, s, t\}$
2. Indiquer les ensembles finis parmi ceux qui suivent :
 $A = \{\text{les saisons}\}$; $B = \{\text{les états des USA}\}$; $C = \{\text{les nombres entiers positifs inférieurs à } 1\}$; $D = \{\text{les nombres entiers impaires}\}$; $E = \{\text{les nombres entiers positifs diviseurs de } 12\}$; $F = \{\text{les chiens vivants en Tunisie}\}$
3. Donner la liste des ensembles suivants : $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$; $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ est pair}, x < 15\}$; $C = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 + x = 3\}$

Exercice II :

1. Démontrer que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ n'est pas un sous-ensemble de $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ est pair}\}$
2. Soit $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$
 - a- Quels sont les éléments de A ?
 - b- Dire si les relations suivantes sont vraies ou fausses
 $1 \in A$; $\{1, 2, 3\} \subset A$; $\{6, 7, 8\} \in A$; $\{\{4, 5\}\} \subset A$; $\emptyset \notin A$; $\emptyset \subset A$

Exercice III

On suppose que $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ et $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$;

$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $E = \{2, 4, 6, 8\}$; $F = \{1, 5, 9\}$

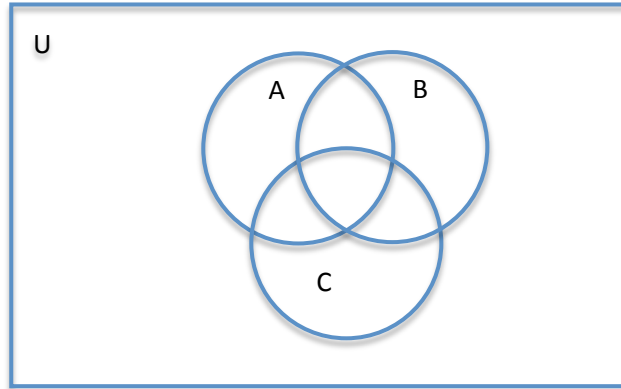
Trouver : $A \cap (B \cup E)$; $(A \cap D) \cap B$; $(A \cap E)^c$; $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

Exercice IV

1. Sachant que A et B sont des ensembles et U est l'univers, écrire les équations duales des équations suivantes $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup \emptyset$; $(A \cap U) \cup (B \cap A) = A$
2. Démontrer que $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$

Exercice V

Sur le diagramme de Venn de la figure ci-après, ombrer les ensembles suivants



$$A \cap B \cap C; A \cup (B \cap C); A^c \cup B \cup C; A^c \cap B^c \cap C; A^c \cap (B \cup C)$$

$$A \setminus (B \cup C); (A \cup B) \setminus C; (A^c \cap B) \setminus C$$

TD N°2- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Exercice I

En notant P, Q et R les trois affirmations suivantes :

P= « Pierre fait des maths »

Q= « Pierre fait de la Chimie »

R= « Pierre fait de l'Anglais »

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres P, Q, R et les connecteurs usuels

1. « Pierre fait des maths et de l'Anglais mais pas de Chimie »
2. « Pierre fait des Maths et de la Chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'Anglais »
3. « Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths »
4. « Il est faux que Pierre ne fasse pas des Maths et fasse quand même de la chimie »
5. « Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais ou de la chimie sans faire des Maths »
6. « Pierre ne fait ni Anglais ni chimie mais il fait des Maths »

Exercice II

Le professeur Leblond parlait avec son assistant Lebrun et l'étudiant Leroux :

- Vous remarquerez que l'un d'entre nous est blond, que l'autre est brun et le troisième roux, dit celui qui a les cheveux bruns. Et pourtant aucun d'entre nous n'a un nom qui correspond à la couleur de ses cheveux ! Amusant, non ?



- Tu as raison, dit le professeur.

De quelle couleur sont les cheveux de l'assistant ?

Exercice III

Déterminer la table de vérité de chacune des formes obtenues à partir de $\neg P \vee Q \wedge \neg R$

Exercice IV

Soit f une formule dépendant de trois atomes P, Q, R qui possède deux propriétés :

- $f(P, Q, R)$ est vraie si P, Q et R sont toutes les trois vraies
- la valeur de vérité de $f(P, Q, R)$ change quand celle d'une seule des trois variables change

Construire la table de vérité de f et déterminer une formule possible pour f .

Exercice V

1. Construire la table de vérité de chacune des propositions suivantes et conclure quant à leur nature :
 - $P \vee \neg(P \wedge Q)$
 - $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
2. Montrer que
 - la disjonction est distributive par rapport à la conjonction : $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 - l'opération de disjonction peut être écrite en fonction des opérations de conjonction et de négation : $P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
3. Démontrer les lois de Morgan :
 - $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
 - $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
4. Montrer que
 - « P implique Q et Q implique P » est logiquement équivalent à « P si et seulement si Q »
 - $P \leftrightarrow Q$ peut être écrite à l'aide des trois connecteurs $\wedge, \vee$ et $\neg$.

Exercice VI

1. On introduit le symbole barre de Scheffer « $|$ » ou encore « barre d'incompatibilité », en définissant $P | Q$ par : P et Q sont incompatibles – c'est à dire, P et Q ne peuvent pas être vraies en même temps- Donner sa table de vérité et démontrer que ce connecteur suffit à définir tous les autres.
2. Montrer que tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables à partir des seuls connecteurs : $\rightarrow$ et $\neg$

TD N°3- VALIDITE D'ARGUMENT ET DEMONSTRATION DE FORMULES

Exercice I

- Démontrer sans table de vérité que $P \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \equiv Q$
- Soit V la constante « vrai » et F la constante « faux », vérifier également (sans table de vérité) que

$$P \rightarrow F \equiv \neg P$$

$$V \rightarrow P \equiv P$$

Exercice II

Tester la validité de l'argument suivant :

Si j'étudie, alors je n'échouerai pas en mathématiques

Si je ne joue pas au basketball, alors j'étudierai

Mais j'ai échoué en mathématiques

Donc, je joue au basketball.

Exercice III

Indiquer si les argumentations suivantes sont correctes :

1. De $P, P \rightarrow q$ je déduis R
2. De $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R$, je déduis R
3. De $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q, P \vee R$ je déduis R
4. De $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q, P$ je déduis R
5. De $P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow \neg Q$ je déduis $P \leftrightarrow Q$

Exercice IV

Formaliser les énoncés suivants en dégageant les connecteurs logiques

- (A) Si le meurtre a eu lieu la nuit sans témoin, alors Pierre est l'assassin
- (B) Si le meurtre a eu lieu sans témoin alors il a eu lieu la nuit
- (C) Si le meurtre a eu lieu la nuit, alors il a eu lieu sans témoin
- (D) Le meurtre a eu lieu la nuit ou sans témoin
- (E) Pierre est l'assassin

Peut-on déduire (E) des hypothèses (A), (B), (C), (D)

Exercice V

On suppose que l'on a les règles et faits suivants :

- Si Pierre rate son tournoi alors Pierre sera déprimé
 - S'il fait beau alors Pierre ira à la piscine
 - Si Pierre ne va pas à la piscine il sera déprimé
 - A la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.
 - Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.
1. Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle
 2. Prouver que Pierre sera déprimé à l'aide d'une preuve en déduction naturelle. On pourra utiliser le tiers exclu sous forme de l'axiome $\Gamma \mid \neg P \vee P$

Exercice VI

Démontrer que

1. $\{ P \rightarrow (\neg Q \leftrightarrow (R \vee S)), \neg S \} \mid \neg (P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
2. $\mid \neg P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow M) \rightarrow M))$

Exercice VII

Indiquer par la méthode de table de Beth si les formules suivantes sont valides ou non :

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$
2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

TD N°4- LOGIQUE DES PREDICATS

Exercice I

Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
2. Il y a des gens que l'on peut rouler tout le temps et quelquefois on peut rouler tout le monde, mais on ne peut pas rouler tout le monde chaque fois.

Exercice II

Traduire en français les formules suivantes :

$$1. \forall x \left(E(x) \rightarrow \left(\exists y \left(C(y) \wedge \exists z \left(M(z) \wedge T(x, y, z) \right) \right) \right) \right)$$

avec $E(x)$: x est un étudiant, $C(y)$: y est un cours, $M(z)$: z est un mauvais enseignant, $T(x, y, z)$: x suit le cours y enseigné par z.

$$2. \quad \forall x \forall y \forall z \left(T(x) \wedge C(y, x) \wedge C(w, x) \wedge D(y, z) \wedge D(y, w) \rightarrow G(f(g(y), g(z), g(w))) \right)$$

avec $T(x)$: x est un triangle, $C(x, y)$: y est le coté de x , $D(x, y)$: x est différent de y , $G(x, y)$: x est un plus grand que y , $f(x, y)$: somme de x et de y , $g(x)$: longueur de x .

Exercice III

On suppose que (a, b, c) prenne ses valeurs dans un univers de discours qui est une partie de $\mathbb{R}^3$ telle que $b^2 - 4ac > 0$; quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $\forall a \forall b \forall c \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$
2. $\exists x \forall a \forall b \forall c (ax^2 + bx + c = 0)$

Exercice IV

On considère le langage composé de $\{a, b : \text{constantes}, f : \text{symbole fonctionnel}, P : \text{symbole de prédicat}\}$

- le domaine $D = \{1, 2\}$
- l'interprétation I définie :

$$I(a) = 1, I(b) = 2$$

$$I(f(1)) = 2, I(f(2)) = 1$$

$$I(P(2, 1)) = 0, I(P(2, 2)) = 0, I(P(1, 2)) = 1, I(P(1, 1)) = 1$$

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

1. $I(P(b, f(b)))$
2. $I(P(a, f(a)))$
3. $I(\forall x \forall y P(y, x))$
4. $I(\forall x \forall y P(y, x) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

III- TRAVAIL A RENDRE

PARTIE I : RECHERCHE

Présenter une revue des erreurs de raisonnement, appelées également les erreurs de logique.

PARTIE II : DEVOIR DE MAISON

NB: Ce travail est à remettre la semaine du 26 Novembre 2016 ;

Question I

Au cours de l'enquête dont il est chargé, un commissaire de police effectue le raisonnement suivant :

- Si Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit, c'est que Pierre est le meurtrier ou que Jean est un menteur
- Si Pierre n'est pas le meurtrier, alors Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit et le crime a eu lieu après minuit
- Si le crime a eu lieu après minuit, alors Pierre est le meurtrier ou Jean est un menteur.

Il en conclut que Pierre est le meurtrier.

Son raisonnement est-il correct ? Justifier en déterminant la validité de son argument.

Question II

La formule suivante est-elle une tautologie ? Justifier en utilisant un raisonnement par l'absurde.

$$\vdash (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$$

Question III

Prouver le théorème suivant (On n'utilisera pas le raisonnement par l'absurde)

$$\vdash (A \vee B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow \neg B \rightarrow D$$

IV- SUPPLEMENTS : EXAMENS

Examen de Logique Mathématique; Session de Janvier 2016 ; Durée : 2h ;

NB : Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées séparément dans n'importe quel ordre.

Question 1 (Equivalence logique)

Montrer en utilisant les lois d'algèbre de propositions que la formule : $\neg(R \vee (Q \wedge (\neg R \rightarrow \neg P)))$ est équivalente à la formule : $\neg R \wedge (P \vee \neg Q)$.

Question 2 (Argumentation)

Soit l'énoncé suivant :

« L'utilisateur a contacté l'administrateur réseau, mais il n'a pas entré un mot de passe valide.

L'accès est accordé à chaque fois que l'utilisateur a contacté l'administrateur réseau, ou il a entré un mot de passe valide.

Donc l'accès sera refusé si l'utilisateur n'a pas entré un mot de passe valide, ou il n'a pas contacté l'administrateur. »

Ce raisonnement est-il valide ? Justifier.

Question 3 (Démonstration de formule)

Prouver que la formule suivante est un théorème en utilisant une déduction naturelle :

$$\vdash (P \vee Q) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg P) \rightarrow (T \rightarrow S) \rightarrow \neg Q \rightarrow S$$

Question 4 (Table de Beth)

Est-ce que la formule suivante est un théorème? Justifier en utilisant l'arbre de Beth.

$$((P \rightarrow S) \vee (Q \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow S)$$

Question 5 (Formalisme & Théorie des ensembles)

Soient les affirmations suivantes :

A : Les bébés ne sont pas logiques

B : On ne peut pas mépriser une personne qui dresse un crocodile

C : Les personnes illogiques sont méprisables

1- Modéliser en logique de prédicats les affirmations A, B et C.

2- Quelle conclusion peut-on tirer de ces affirmations ? Justifier en utilisant le diagramme de Venn.

Question 6 (Formalisme)

On considère la formule : $\exists x(x > 0) \wedge \forall y(y < 0)$, où x et y sont des entiers.

1- Donner la négation de cette formule. Justifier.

2- Enoncer en français la formule, ainsi que sa négation.

Examen de Logique Mathématique ; Session de Juin 2016 ; Durée : 2h

NB : Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Question 1 (Opérations sur les formules)

La formule suivante est-elle une tautologie? Justifier en utilisant les lois d'algèbre de propositions.

$$((P \wedge \neg(P \vee Q)) \wedge \neg R)$$

Question 2 (Argumentation)

Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un chant obscène et un rire sardonique, cependant nous pouvons influencer le comportement en

jouant de l'orgue ou en brûlant de l'encens. Compte-tenu des données suivantes :

- Le chant ne se fait pas entendre, à moins que nous jouions de l'orgue sans que le rire ne se fasse entendre.
- Si nous brûlons de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
- En ce moment, Le chant se fait entendre et le rire est silencieux.

et de la conclusion :

Donc en ce moment nous jouons de l'orgue et ne brûlons pas d'encens ;

Prouver que ce raisonnement est correct.

Question 3 (Table de Beth)

La formule suivante est-elle une tautologie ? Justifier en utilisant un raisonnement par l'absurde :

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$$

Question 4 (Démonstration de formule)

Prouver que la formule suivante est un théorème en utilisant une déduction naturelle :

$$\vdash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$$

Question 5 (Formalisme)

Considérons le langage formé par les constantes a et f et les prédicats G et J , les symboles utilisés ont les sens suivants :

- a := l'équipe d'Allemagne.
- f := l'équipe de France.
- $J(x,y)$:= x a joué un match contre y .
- $G(x,y)$:= x a gagné contre y .

I- Exprimer en logique de prédicats les assertions suivantes :

1. L'équipe de France a gagné un match et en a perdu un.
2. L'équipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul.
3. Une équipe a gagné tous ses matchs.
4. Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs.

V - ANNEXE

Axiomes	Règles
$A_1: P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ $A_2: (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$ $A_3: P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$ $A_4: P \wedge Q \rightarrow P$ $A_5: P \wedge Q \rightarrow Q$ $A_6: P \rightarrow P \vee Q$ $A_7: Q \rightarrow P \vee Q$ $A_8: (P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$ $A_9: \neg \neg P \rightarrow P$ $A_{10}: (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$ $A_{11}: (P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$ $A_{12}: (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ $A_{13}: (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$	• $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash Q$ • $\{P \rightarrow Q, \neg Q\} \vdash \neg P$ • $\{\neg(P \wedge Q), P\} \vdash \neg Q$ • $\{P \vee Q, \neg P\} \vdash Q$ • $\{P \rightarrow R, Q \rightarrow R\} \vdash P \vee Q \rightarrow R$ • $\{P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q\} \vdash \neg P$

Règle d'affirmation	Règle de réfutation
$\neg A$ $\bar{A}$	$\overline{\neg A}$ A
$A \vee B$ $\swarrow \searrow$ $A \quad B$	$\overline{A \vee B}$ $\bar{A}$ $\bar{B}$
$A \wedge B$ A B	$\overline{A \wedge B}$ $\swarrow \searrow$ $\bar{A} \quad \bar{B}$
$A \rightarrow B$ $\swarrow \searrow$ $\bar{A} \quad B$	$\overline{A \rightarrow B}$ A $\bar{B}$
$A \leftrightarrow B$ $\swarrow \searrow$ $A \quad \bar{A}$ $B \quad \bar{B}$	$\overline{A \leftrightarrow B}$ $\swarrow \searrow$ $\bar{A} \quad A$ $B \quad \bar{B}$